www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours d'entrée à l'Ecole des Ingenieurs de la Ville de Paris ouvert le 18 avril 1990

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES
(durée 2 H - Coefficient 2)

Question préliminaire

Soit g une fonction de classe C^1 définie sur R_+, à valeurs dans R_+^*, décroissante et de limite nulle quand x tend vers $+\infty$.

a) Etudier la série de terme géneral $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)\sin(t)dt$.

b) Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t)\sin(t)dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} g(t)\sin(t)dt = \sum_0^{+\infty} u_n$.

c) Montrer que $0 \le \int_0^{2\pi} g(t)\sin(t)dt \le \int_0^{+\infty} g(t)\sin(t)dt \le \int_0^{\pi} g(t)\sin(t)dt$

d) Vérifier que $\forall x \in R_+ \quad \left|\int_x^{+\infty} g(t)\sin(t)dt\right| \le 2g(x)$.

I ère Partie

On définit les 2 suites de fonctions $S_n(x)$ et $C_n(x)$ sur R_+^* par :

$\forall n \ge 1$ et $\forall x > 0 \quad S_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(t+x)^n}\,dt$ et $C_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(t+x)^n}\,dt$

1) Vérifier la convergence des integrales $S_n(x)$ et $C_n(x)$.

2) a) Exprimer $C_n(x)$ en fonction de $S_{n+1}(x)$.

b) Etudier les signes de $S_n(x)$ et $C_n(x)$ pour $n \in N^*$ et $x \in R_+^*$.

c) Donner une relation de récurrence liant $S_n(x)$ et $S_{n+2}(x)$. En déduire une majoration de $S_n(x)$.

d) Quelles sont les limites de $S_n(x)$ et de $C_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) Calculer à l'aide de votre calculatrice et par la méthode numérique de votre choix une valeur approchée à 10^{-p} près de $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{(t+5)^7}\,dt$ et de $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{(t+5)^7}\,dt$.

(Aucune justification de la précision obtenue n'est demandée. A titre indicatif la méthode de Simpson appliquée en découpant l'intervalle d'intégration en 20 subdivisions convient).

En déduire un encadrement de $S_7(5)$.

II ème Partie

Dans cette partie et les 2 suivantes on se propose d'étudier la fonction f définie sur R_+ par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,dt$.

1) Vérifier que f est bien définie sur R_+.

On admettra pour la suite du problème que $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

2) a) Vérifier que $\forall x \in R_+^* \quad f(x) = \cos(x)*S(x) - \sin(x)*C(x)$ où C et S sont les 2 fonctions définies sur R_+^* par $S(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et $C(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$

.../...

b)Montrer que f est de classe C^2 sur R_+^* et est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre que l'on explicitera.

3)Vérifier que $f'(x)=-S_2(x)$ pour $x \in R_+^*$. En déduire le sens des variations de f pour x appartenant à R_+^*.

4)Etudier de même le sens de la concavité de f pour x appartenant à R_+^*.

IIIème Partie

1)Montrer que $x^{n-1}S_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ pour tout $n \in N^*$.

2)a)Montrer l'existence d'une suite de nombres entiers relatifs $\{a_n\}$ que l'on explicitera telle que: $\forall x \in R_+^*$ $f(x)=\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{x^{2p+1}} + a_n S_{2n+1}(x)$. (1)

b)Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_p}{x^{2p+1}}$ pour $x>0$?

3)Donner avec justifications une valeur approchée à 10^{-6} près de f(100), ainsi qu'une valeur approchée de f(10) à 10^{-4} près.

4)Donner l'encadrement optimal de f(5) obtenu par la formule (1). Améliorer l'encadrement à partir des résultats de la question 3 de la 1ère partie.

IVème Partie

Dans cette partie on se propose d'étudier la fonction f au voisinage de 0. On utilise pour cela la formule $f(x)=\cos(x)*S(x)-\sin(x)*C(x)$ démontrée à la question II 2 a.

1)a)Vérifier l'existence d'une suite $\{b_n\}$ que l'on explicitera telle que:

$\forall x>0$ $S(x)=\sum_0^\infty b_n x^n$ .On vérifiera que $b_0=\frac{\pi}{2}$.

b)En déduire une valeur approchée à 10^{-6} près de S(1).

2)On pose $K=\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t}\,dt$ et $L=\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$

a)Vérifier la convergence de K.

b)Vérifier l'existence d'une suite $\{c_n\}$ que l'on explicitera telle que:

$\forall x>0$ $C(x) - L + K + \ln(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$.

c)Donner une valeur approchée à 10^{-6} près de $\sum_0^\infty c_n x^n$ pour x=1.

3)Donner un équivalent simple de f(x)-f(0) pour x tendant vers 0 par valeurs supérieures.En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de 0.

4)a)Exprimer L en fonction de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^8}\,dt$.

b)Donner une majoration simple de $\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^8}\,dt$.

c)Exprimer $\int_1^{10} \frac{\sin(t)}{t^8}\,dt$ sous la forme d'une série.En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de L.

5)Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de f(1).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail